Пентагональная теорема Эйлера

Фёдор Петров

23 апреля 2021 г.

1 Введение

Пентагональная теорема

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n-1)/2} = \tag{1}$$
$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$

была сначала высказана в качестве гипотезы ([1], представлено в 1741 году) а затем доказана Леонардом Эйлером [4]. Обе статьи опубликованы в Комментариях Петербургской академии наук, в которой Эйлер проработал в общей сложности более 30 лет. Здесь и далее мы ссылаемся на работы и переписку Эйлера по обзору Джордана Белла [9], проделавшего в том числе большую работу по переводу с латыни. Ряд исторических сведений почерпнут из замечательного обзора Игоря Пака [10].

Это удивительно красивое тождество оказалось и очень важным для развития математики. Оно наряду с другими работами Эйлера положило начало области, которую сейчас называют теорией разбиений, в которой особенно понравился другой гениальный математик, Сриниваса Рамануджан. Его обобщения возникают при изучении предметов самых разных — от бесконечномерных алгебр Ли до суперструн.

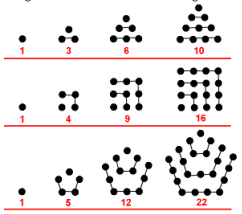
Мы обсудим некоторые доказательства пентагональной теоремы, начав с оригинального аргумента Эйлера, а также её приложения и обобщения.

Но прежде того обсудим, как следует понимать (1). Есть два подхода. Во-первых, можно считать что x это вещественное или комплексное число и $|x| < 1$. Тогда обе части (1) сходятся и речь идёт о равенстве бесконечной суммы (которая в данном случае не зависит от порядка

слагаемых) бесконечному произведению. Другой подход к (1) не апеллирует к анализу. Именно, можно зафиксировать показатель m и определить коэффициент бесконечного произведения $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ при одночлене x^m, перемножив лишь конечное количество сомножителей $1-x^i$ — именно, первые m сомножителей. Домножение на каждую следующую скобку не меняет этого коэффициента, что делает такое определение естественным. Тождество (1) говорит, что коэффициент при x^m окажется равным $(-1)^n$, если $m = n(3n-1)/2$ при некотором целом n, и равным 0 в противном случае. Таким образом, его можно понимать как серию утверждений о коэффициентах *многочленов*.

В теории разбиений продуктивно используются оба подхода, оправдание некоторых преобразований с бесконечными суммами и произведениями требует в обоих случаях некоторой рутинной проверки, которая в настоящей статье опускается.

Устоявшееся название "пентагональная теорема" связано с тем, что числа $n(3n-1)/2 = 1+4+\dots+(3n-2)$ называют пятиугольными — по аналогии с треугольными $n(n+1)/2 = 1+2+\dots+n$ и квадратными $n^2 = 1+3+5+\dots+(2n-1)$ числами, см. картинку. Впрочем, при отрицательном $n = -k$ мы получаем числа вида $k(3k+1)/2$, которые пятиугольными уже не называются.



2 Доказательство Эйлера

Последуем старому совету Пьера-Симона Лапласа: *читайте Эйлера, читайте Эйлера — он наш общий учитель*.

На протяжении десяти лет Эйлер постоянно возвращался к пентагональной теореме в своей переписке с Даниилом и Николаем Бернулли, д'Аламбером и Гольдбахом. Доказательство, которое мы сейчас обсудим, приводится Эйлером в письме Гольдбаху от 9 июня 1750-го года.

Эйлер начинает со следующего общего тождества:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\dots = 1-\alpha-\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)-\dots, \quad (2)$$

которое доказывается непосредственно. Переписывая произведение

$$s := (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$$

с помощью (2) получаем

$$s = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2)\ldots = 1 - x - Ax^2, \quad \text{где}$$
$$A = 1 - x + x(1-x)(1-x^2) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \ldots$$

Раскрываем везде скобку $1 - x$, получаем

$$\begin{aligned} A = 1 &- x + x(1-x^2) - x^2(1-x^2) + x^2(1-x^2)(1-x^3) \\ &- x^3(1-x^2)(1-x^3) + x^3(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \ldots = \\ &1 - x^3 - x^5(1-x^2) - x^7(1-x^2)(1-x^3) - \ldots = \\ &1 - x^3 - Bx^5, \quad \text{где} \\ B = 1 &- x^2 + x^2(1-x^2)(1-x^3) + x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \ldots. \end{aligned}$$

Продолжаем в том же духе: раскрываем везде скобку $1 - x^2$ и группируем пары слагаемых, которые кратны одной и той же степени x. Получаем

$$B = 1 - x^5 - Cx^8, \quad \text{где}$$
$$C = 1 - x^3 + x^3(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \ldots.$$

Аналогично $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$, $D = 1 - x^9 - Ex^{14}$ и так далее.

Теперь несложно получить (1). Имеем

$$\begin{aligned} s = &\quad 1 - x - Ax^2 \\ A = &\quad 1 - x^3 - Bx^5 \\ B = &\quad 1 - x^5 - Cx^8 \\ C = &\quad 1 - x^7 - Dx^{11} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Умножая второе уравнение на $-x^2$, третье на x^7, четвёртое на $-x^{15}$ и так далее и складывая (чтобы сократились члены с буквами $A, B, C \ldots$) получаем

$$s = 1 - x - x^2(1-x^3) + x^7(1-x^5) - x^{15}(1-x^7) + \ldots,$$

что равносильно (1).

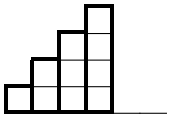
3 Вероятность

Приведённое доказательство коротко и понятно, исключительно нетривиально (что подтверждается хотя бы тем, сколько времени заняло у

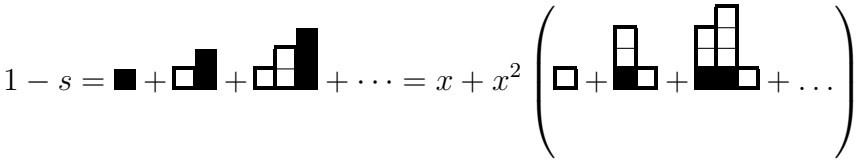
Эйлера найти его), и хочется понять, что стоит за этим жонглированием формулами. Изложим то же доказательство без формул, но с картинками.

Начнём с тождества (2). Оно имеет ясный вероятностный смысл: если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — вероятности независимых событий, то $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots$ — вероятность того, что ни одно из них происходит. Она равна 1 минус (вероятность того что произошло первое событие) минус (вероятность того, что первое событие не произошло, но произошло второе) минус (вероятность того, что первые два события не произошли, но произошло третье) минус (и т. д.) В нашей ситуации $\alpha = x, \beta = x^2, \gamma = x^3, \ldots$. Соответствующий случайный процесс можно реализовать так: рассмотрим бесконечную клетчатую плоскость. Пусть $0 < x < 1$ и в каждом квадрате с вероятностью $1 - x$ (и независимо от остальных квадратов) вырастает ёлочка. Тогда $s = (1 - x)(1 - x^2)\ldots$ это вероятность того, что

в каждом из выделенных на рисунке прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, *... есть хотя бы одна ёлочка.*

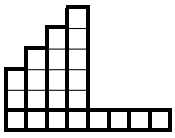


Следовательно, $1 - s$ есть вероятность того, что в одном из выделенных прямоугольников нет ёлочки. В том, что написано далее, фигура, составленная из чёрных и белых прямоугольников, означает вероятность такого события: каждый чёрный прямоугольник не содержит ёлочек, а каждый белый содержит хотя бы одну ёлочку:

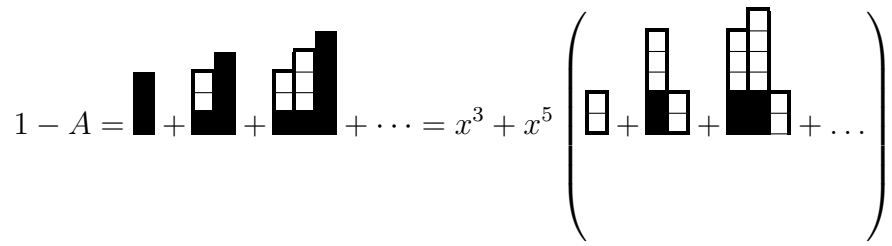


Получаем $1 - s = x + x^2 A$, где A после нашего перекладывания прямоугольников интерпретируется как вероятность такого события:

смотрим на первую ёлочку в нижней строке, тогда все выделенные прямоугольники $1 \times 2, 1 \times 3, \ldots$ *слева от неё содержат хотя бы по одной ёлочке.*

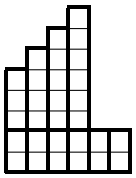


Тогда $1 - A$ есть вероятность того, что в некотором столбце выделенный прямоугольник, а также часть первой строки вплоть до этого прямоугольника не содержат ёлочек. Это опять же можно перерисовать так:



То есть $1 - A = x^3 + x^5 B$, где B есть вероятность такого события:

смотрим на первую ёлочку в нижних двух строках, тогда все выделенные прямоугольники $1 \times 3, 1 \times 4, \ldots$ *слева от неё содержат хотя бы по одной ёлочке.*



Продолжая в таком духе, получаем (3).

4 Биекция

Раскроем скобки в выражении $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots$. Мы получим сумму всевозможных слагаемых вида

$(-1)^m x^{c_1+c_2+\ldots+c_m}$, $\quad c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ – целые положительные числа.

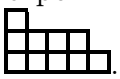
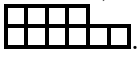
Будем говорить, что числа $c_1, \ldots, c_m$ образуют слагаемые *разбиения* числа $N = c_1 + \ldots + c_m$. Таким образом, коэффициент при данном одночлене x^N оказывается равен *разности между количеством разбиений* N *на четное количество различных слагаемых и на нечетное количество различных слагаемых.*

Тождество (1) говорит, что эта разность равна $(-1)^n$, если $N = n(3n+1)/2$ для некоторого целого n, и равна 0 в противном случае.

То есть разбиений на четное и на нечетное количество слагаемых должно быть поровну или "почти поровну", если N имеет указанный вид. Естественно желание установить биекцию (или, соответственно,"почти

биекцию") между теми и другими разбиениями. Это было сделано американским математиком Фабианом Франклиным в 1881 г. Приведём его доказательство.

Попробуем разбить все разбиения N на пары так, чтобы разбиения в каждой паре имели разное по четности количество слагаемых. Если $N = n(3n \pm 1)/2$ и разбиение на слагаемые имеет вид $(n+1) + \cdots + 2n$ или $n + \cdots + (2n-1)$, выделим это разбиение и разобьем на пары все остальные. Если же N не имеет такого вида, разобьем на пары просто все разбиения N. Пусть x — наибольшее слагаемое разбиения и пусть оно содержит слагаемые $x, x-1, \ldots, x-t+1$, но не содержит $x-t$. Пусть, далее, s — наименьшее слагаемое разбиения t. Если $s \leq t$, то выкинем из разбиения слагаемое s и прибавим по 1 к слагаемым от $x-s+1$ до x. Если $s > t$, вычтем по 1 из слагаемых от $x-t+1$ до x и добавим слагаемое t. Это соответствие между разбиениями разбивает их на пары, и в каждой паре количества слагаемых отличаются на 1. Заметим, что первое из наших соответствий не работает только в случае $x-t+1 = s = t$ (в этом случае следовало бы увеличивать выкидываемое слагаемое). Второе соответствие не работает только в случае $s = t+1 = x-t+1$ (в этом случае в новом разбиении получаются два равных слагаемых). Но как раз такие разбиения мы заблаговременно выделяли отдельно.

Соответствие Франклина становится особенно наглядным, если каждому разбиению сопоставлять *диаграмму Юнга* — фигуру, составленную из единичных квадратиков, в которой слагаемым соответствуют длин строк. Например, разбиению $10 = 5+4+1$ соответствует диаграмма  . Тогда s это количество клеток в самой короткой строчке, а t — в диагонали, ведущей из самой правой клетки нижней строчки на северо-запад. Если $s \leqslant t$, мы убираем самую короткую строчку и увеличиваем за счёт неё s самых длинных строк. Если же $s > t$, мы укорачиваем t самых длинных строк на 1 каждую и добавляем строку длины t. В приведённом примере $s = 1 < 2 = t$, так что мы получаем парное разбиение $10 = 6+4$ с диаграммой  .

Решите следующую задачу, предлагавшуюся Финляндией в 1979 году на Международную олимпиаду:

набор целых положительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, удовлетворяющий равенству $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 1979$, назовем четным, если n четно, и нечетным, если n нечетно. Докажите, что четных и нечетных наборов поровну.

В каком году их было не поровну?

5 Число разбиений

Рассмотрим произведение

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\ldots=$$
$$\left(1+x+x^2+\ldots\right)\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)\left(1+x^3+x^6+\ldots\right)\ldots=$$
$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots=p(0)+p(1)x+p(2)x^2+p(3)x^3+\ldots. \quad (4)$$

Мы воспользовались разложением дроби $\frac{1}{1-y}$ в геометрическую прогрессию $1+y+y^2+y^3+\ldots$ при $y=x,x^2,\ldots$. Раскрывая скобки, получаем, что коэффициент $p(n)$ при x^n равен числу способов представить n в виде

$$n=k_1+2k_2+3k_3+\ldots \quad (5)$$

с целыми неотрицательными $k_1,k_2,\ldots$. Такому представлению соответствует разбиение числа n на натуральные слагаемые (не обязательно различные): k_1 единиц, k_2 двоек, k_3 троек и т.д. — и наоборот, каждому разбиению соответствует представление (5). Разбиениям, как и в предыдущем разделе, соответствуют диаграммы Юнга — только теперь длины строк могут совпадать.

Комбинируя (1) и (4) получаем

$$1=(p(0)+p(1)x+p(2)x^2+\ldots)(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots=$$
$$(p(0)+p(1)x+p(2)x^2+\ldots)(1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots). \quad (6)$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициент при x^n, $n>0$, получаем рекуррентное соотношение на числа $p(n)$:

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-\ldots=0. \quad (7)$$

Это тождество было получено Эйлером в работе [2].

Соотношение (7) позволяет быстро искать значения $p(n)$ вручную или на компьютере (отметим, что Эйлер в [2] вычислил с помощью (7) таблицу значений $p(n)$ вплоть до $n=30$, а та же задача для как можно большего n была предложена участникам самой первой всесоюзной олимпиады по программированию в 1988 году.)

Но понять что-нибудь о росте значений $p(n)$ при больших n с помощью (7) проблематично. Априори совершенно не очевидно даже, что последовательность, задаваемая начальным условием и рекуррентным соотношением (7), принимает положительные значения.

Тем не менее, асимптотика числа разбиений, полученная Харди и Рамануджаном, непосредственно связана с пентагональной теоремой. Число разбиений растёт как

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} e^{\pi\sqrt{2n/3}} \tag{8}$$

(обозначение $a \sim b$ означает, что частное $a : b$ стремится к 1), но формула (8) становится гораздо точнее и открывает путь к полному асимптотическому разложению, если вместо n использовать $n - \frac{1}{24}$:

$$p(n) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}(n-\frac{1}{24})} - \frac{1}{2(n-\frac{1}{24})^{3/2}} \right) e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}. \tag{9}$$

Чтобы продемонстрировать, насколько формула (9) точнее, чем (8), приведём значения при $n = 200$: $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$, правая часть (8) при $n = 200$ даёт значение $4\,100\,251\,432\,187$, а правая часть (9) — значение $3\,972\,998\,993\,185$.

Почему $\frac{1}{24}$? Связь не очевидна, но на самом деле потому, что

$$\frac{n(3n+1)}{2} + \frac{1}{24} = \frac{3}{2}\left(n + \frac{1}{6}\right)^2,$$

а значит при умножении на $x^{1/24}$ в показателях суммы в правой части (1) выделяются полные квадраты:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^{n-1/24}\right)^{-1} = x^{1/24} \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{3}{2}(n+1/6)^2}.$$

Функция в правой части удовлетворяет неочевидному функциональному уравнению, которое позволяет с хорошей точностью находить её значения вблизи $x = 1$, а они в свою очередь связаны с ростом $p(n)$.

6 Сумма делителей

Тождество Лейбница для производной произведения $(fg)' = f'g + g'f = fg(f'/f + g'/g)$ допускает при некоторых условиях обобщение

$$(f_1 f_2 \ldots)' = \left(\frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots\right) f_1 f_2 \ldots$$

на случай произведения бесконечного количества сомножителей. Эти условия выполнены для правой части (1), так что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{n(3n+1)}{2}x^{n(3n+1)/2}=x\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}\right)'=x\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)\right)'=$$
$$-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{1-x^k}\right)\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)\right)=-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{1-x^k}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}\right).$$

Для первого сомножителя в правой части имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{1-x^k}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots)=$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{m=1}^{\infty}x^{mk}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k|n}k\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n,$$

где $\sigma(n)$ — сумма всех натуральных делителей числа n. Таким образом,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{n(3n+1)}{2}x^{n(3n+1)/2}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}\right). \tag{10}$$

Перепишем (10) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{n(3n+1)}{2}x^{n(3n+1)/2}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}\right)=0$$

и раскроем скобки. Приравнивая к нулю коэффициент при x^N получаем

$$\sigma(N)-\sigma(N-1)-\sigma(N-2)+\sigma(N-5)+\sigma(N-7)-\ldots=0, \tag{11}$$

где надо полагать $\sigma(N-N)=N$, буде такое слагаемое возникнет (то есть в случае если N имеет вид $N=n(3n+1)/2$ с целым n).

Тождество (11) было также получено Эйлером [3, 4] ещё до доказательства пентагональной теоремы (но с её помощью — собственно, его аргумент приведён выше). Эйлер находил его весьма примечательным, охотно соглашались с ним Гольдбах и д'Аламбер. Действительно, сам факт, что суммы делителей чисел $N, N-1, N-2, N-5, \ldots$ связаны нетривиальным соотношением, ошеломляет.

7 Тройное тождество Якоби

Замечательным обобщением пентагональной теоремы является *тройное тождество Якоби* [5] (раньше, чем Якоби, его открыл Гаусс, но не опубликовал):

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-zq^{n-1})(1-z^{-1}q^n)(1-q^n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m(m-1)/2}z^m. \qquad (12)$$

Здесь следует понимать обе части как степенные ряды по q, коэффициенты которых суть многочлены Лорана от буквы z (то есть многочлены от z, z^{-1}). Поскольку q везде содержится только в положительных степенях, мы как и раньше можем определить в левой части коэффициент при любой степени q.

Пентагональная теорема получается, если подставить $q=x^3$, $z=x$.

Приведём два доказательства тройного тождества Якоби — алгебраическое и комбинаторное.

Начнём с комбинаторного, которое принадлежит Джеймсу Джозефу Сильвестру [6] и впоследствии неоднократно переоткрывалось. Как показал Ричард Борчердс (см. книгу Питера Кэмерона [7]), к эквивалентному доказательству можно придти из физических соображений, изучая электроны в море Дирака.

Прежде всего, заменим z на $-z$ и умножим обе части (12) на $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)q^k$. Получим равносильное тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n-1})(1+z^{-1}q^n)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}p(k)q^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m(m-1)/2}z^m\right). \qquad (13)$$

Раскроем скобки в произведении $\prod(1+zq^{n-1})$, получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n-1})=\sum_{\lambda}z^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|},$$

где λ пробегает все разбиения $\lambda: 0\leqslant c_1<c_2<\ldots<c_m$ целых неотрицательных чисел на различные целые неотрицательные слагаемые, $m=\ell(\lambda)$ количество слагаемых, $c_1+\ldots+c_m=|\lambda|$ — их сумма. Аналогично,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1}q^n)=\sum_{\mu}z^{-\ell(\mu)}q^{|\mu|},$$

но μ пробегает разбиения все разбиения (в том числе пустое) на различные целые *положительные* слагаемые. Таким образом, левая часть (13)

есть

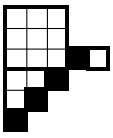
$$\sum_{\lambda,\mu} z^{\ell(\lambda)-\ell(\mu)} q^{|\lambda|+|\mu|}.$$

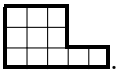
Раскроем скобки и в правой части (13) и обратим внимание на члены с фиксированным показателем буквы z. Получим, что при всяком целом m надо доказать равенство

$$\sum_{\lambda,\mu:\ell(\lambda)-\ell(\mu)=m} q^{|\lambda|+|\mu|} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k+m(m-1)/2} = \sum_{\sigma} q^{|\sigma|+m(m-1)/2}, \qquad (14)$$

где суммирование производится по всем диаграмма Юнга σ с $|\sigma|$ клетками. Пусть $m \geqslant 0$ (случай $m < 0$ аналогичен). Опишем наше соответствие, сопоставляющее диаграмме σ пару разбиений λ, μ и тем доказывающее (14). Увеличим диаграмму σ, пририсовав к ней вниз треугольник из $m(m-1)/2$ клеток: $m-1$ клеток к первому столбцу, $m-2$ ко второму столбцу и так далее. Это множество клеток вообще говоря уже не является диаграммой Юнга, но оно содержит $|\sigma| + m(m-1)/2$ клеток, их мы и собираемся разбивать на λ и σ. Закрасим m клеток на диагональной прямой под дорисованным треугольником, а также клетки этой же прямой, попадающие в диаграмму σ.

В разбиение λ возьмём для каждой закрашенной клетки количество клеток увеличенной диаграммы, лежащих строго выше закрашенной клетки в том же столбце. В разбиение μ возьмём для каждой закрашенной клетки самой диаграммы σ количество клеток диаграммы σ, лежащих в той же строке нестрого правее чем эта закрашенная клетка.



Например, на этом рисунке $m = 3$, $\sigma =$  . Получается $\lambda = \{5, 4, 3, 0\}$, $\mu = \{2\}$. Несложно видеть, что построено взаимно однозначно соответствие, доказывающее (14), а с ним (13) и (12).

Алгебраическое доказательство приводится в следующем разделе.

8 q-биномиальная теорема

Важную роль в комбинаторике играют так называемые q-тождества. Будем называть **q-аналогом** натурального числа n многочлен от буквы q:

$$(n)_q = 1 + q + q^2 + \ldots q^{n-1} = (1 - q^n)/(1 - q).$$

Будем называть q-аналогом факториала $n!$ произведение

$$(n)_q! = (1)_q \cdot (2)_q \cdot \ldots \cdot (n)_q.$$

Обозначим также $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}$. При $q = 1$ получаются обычные факториалы и биномиальные коэффициенты.

q-аналогом биномиальной теоремы является следующая *q-биномиальная теорема*:

$$(x-y)(x-qy)(x-q^2y)\ldots(x-q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{k(k-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k. \quad (15)$$

Доказать (15) можно, например, индукцией по n (для перехода от n к $n+1$ надо умножить обе части на $x - q^n y$, раскрыть справа скобки и упростить коэффициенты). Это несложное доказательство, но оно не раскрывает суть.

Другой способ доказательства (15) состоит в применении *комбинаторной теоремы о нулях* Н. Алона. Последняя утверждает (ограничимся случаем двух переменных, чтобы не вводить новые обозначения), что если многочлен $F(x, y)$ степени не выше n принимает ненулевые значения во всех точках "прямоугольника" $A \times B$, где $|A| = n-k+1, |B| = k+1$ (здесь A, B — подмножества поля, над которым задан многочлен, в нашем случае это поле рациональных функций от буквы q), то и его коэффициент при $x^{n-k}y^k$ равен нулю. О комбинаторной теореме о нулях и её применениях можно прочитать в статье Алона [8]. Применяя эту теорему к многочлену

$$F(x,y) = (x-y)(x-qy)(x-q^2y)\ldots(x-q^{n-1}y)+$$
$$(-1)^{k+1}q^{k(k-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(x-1)(x-q)(x-q^2)\ldots(x-q^{n-k+1})(y-1)(y-q^{-1})\ldots(y-q^{1-k}),$$

который обнуляется на множестве $\{1, q, q^2, \ldots, q^{n-k}\} \times \{1, q^{-1}, q^{-2}, \ldots, q^{-k}\}$ (проверьте это) получаем, что коэффициент при $x^{n-k}y^k$ многочлена F равен нулю, а следовательно у многочлена $(x-y)(x-qy)(x-q^2y)\ldots(x-q^{n-1}y)$ он равен $(-1)^k q^{k(k-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, что и утверждет (15).

Теперь покажем, как (15) влечёт (12).

Зафиксируем большое число N. Подставим в (15) $n = 2N$, $x = z^{-1}$,

$y = q^{-N}$. Получим

$$\prod_{i=1}^{N}(z^{-1} - q^{i-1})(z^{-1} - q^{-i}) = (x - y)\dots(x - q^{2N-1}y) = \\ = \sum_{k=0}^{2N}(-1)^k q^{k(k-1)/2}\begin{bmatrix}2N\\k\end{bmatrix}q^{-Nk}z^{-(2N-k)}.$$

Домножим на $(-1)^N z^N q^{N(N+1)/2}$, тогда левая часть превратится в $\prod_{i=1}^{N}(1-q^{i-1}z)(1-q^i z^{-1})$. Справа переобзначим $k - N = m$. Получим

$$\prod_{i=1}^{N}(1 - q^{i-1}z)(1 - q^i z^{-1}) = \sum_{m=-N}^{N}(-1)^m\begin{bmatrix}2N\\N+m\end{bmatrix}q^{m(m-1)/2}z^m.$$

Теперь устремим N к бесконечности. Заметим, что левая часть будет стремиться (в том смысле, что коэффициент при каждой степени q будет стабилизироваться) к $\prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1}z)(1 - q^i z^{-1})$. Слагаемые справа при $|m| > N/2$ будут стремиться, очевидно, к 0 (каждое по отдельности и все вместе). Для прочих слагаемых q-биномиальный коэффициент

$$\begin{bmatrix}2N\\N+m\end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N+m}\frac{1 - q^{2N+1-i}}{1 - q^i}$$

стремится к $\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^i}$. Окончательно, переходя к пределу, получаем

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^{i-1}z)(1 - q^i z^{-1}) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1 - q^i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m(m-1)/2}z^m,$$

что и требовалось.

Список литературы

[1] L. Euler. Observationes analyticae variae de combinationibus. Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 13 (1741-1743), pp. 64–93.

[2] L. Euler. De partitione numerorum. Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 3 (1750-1751), pp. 125–169.

[3] L. Euler. Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs. Bibliothèque impartiale, 3(1751), pp. 10–31.

[4] L. Euler. Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum. Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 5(1754-1755), pp. 75–83.

[5] C. G. J. Jacobi. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg: Borntraeger (1829), reprinted by Cambridge University Press (2012).

[6] J. J. Sylvester and F. Franklin. A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion. Amer. J. Math., 5:251–330, 1882.

[7] P. J. Cameron. Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms. Cambridge University Press (1994).

[8] N. Alon. Combinatorial Nullstellensatz, Combin. Probab. Comput. 8 (1999) 7–29.

[9] J. Bell. Euler and the Pentagonal Number Theorem. arxiv:0510054

[10] I. Pak. Partition bijections, a survey. The Ramanujan Journal, 12:1 (2006), 5–75.